Preuve

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et soient p, q des entiers naturels tels que $p \leq q$.

Montrons

$$u_p + \dots u_q = (q-p+1) \times \frac{u_p + u_q}{2}$$

La suite (u_n) étant arithmétique de raison r, on a $u_n = u_0 + n \times r$ pour tout entier naturel n.

Par suite

$$\begin{aligned}
u_p + \dots u_q &= (u_0 + p \times r) + \dots (u_q + q \times r) \\
&= (u_0 + \dots + u_0) + (p \times r + \dots + q \times r) \\
&= (q-p+1) \times u_0 + (p + \dots + q) \times r \\
&\quad \text{(il y a autant de } u_0 \text{ que de terme } u_i \text{ avec } p \leq i \leq q \text{ soit } q-p+1) \\
&= (q-p+1) \times u_0 + [(1 + \dots + q) - (1 + \dots + (p-1))] \times r \\
&= (q-p+1) \times u_0 + \left[\frac{q \times (q+1)}{2} - \frac{(p-1) \times p}{2}\right] \times r \\
&= (q-p+1) \times u_0 + \frac{q \times (q+1) - (p-1) \times p}{2} \times r \\
&= (q-p+1) \times u_0 + \frac{q^2 + q - p^2 + p}{2} \times r \\
&= (q-p+1) \times u_0 + \frac{q^2 - p^2 + q + p}{2} \times r \\
&= (q-p+1) \times u_0 + \frac{(q-p) \times (q+p) + 1 \times (q+p)}{2} \times r \\
&= (q-p+1) \times u_0 + \frac{(q-p+1) \times (q+p)}{2} \times r \\
&= \frac{q-p+1}{2} [2 \times u_0 + (q+p) \times r] \\
&= \frac{q-p+1}{2} [u_0 + u_0 + q \times r + p \times r] \\
&= \frac{q-p+1}{2} [(u_0 + p \times r) + (u_0 + q \times r)] \\
&= \frac{q-p+1}{2} [u_p + u_q] \\
&= (q-p+1) \times \frac{u_p + u_q}{2}
\end{aligned}$$